Innhold

1. Innledning

Norsk Tipping (NT) skal innføre et nytt spill; JOKER. I forbindelse med dette spillet er NT interessert i sannsylighetsvurderinger av førstepremiens størrelse. JOKER er lagt opp slik at det er mulig å vinne forskjellige premiesummer avhengig av hvordan en spiller gjør valgene sine. Spillet om førstepremie foregår på følgende måte. For 5 bokser trekkes tilfeldige tall mellom $0, 1, \ldots, 9$. Disse er synlig for spiller. Hvert tall blir trukket uavhengig av de andre. Bak hver av de 5 boksene vil det være trukket et tilfeldig tall fra $0, 1, \ldots, 9$ med en eller flere *jokere*. Det som står bak boksene er ukjent for spiller. Spillets gang er som følger: Spiller kan velge "opp" eller "ned" ettersom om han tror det ukjente tallet er over eller under det utdelte tallet. En spiller vinner d.v.s. flytter seg opp et trinn på premiestigen dersom han gjetter riktig. Dersom han gjetter galt vil han flytte ned et trinn på premiestigen, men aldri lenger ned enn til starttrinnet. Premiestigen er laget slik at det er høyere premie jo høyere spilleren kommer i stigen. Det er 5 premietrinn i tillegg til starttrinn. Spiller kan velge å stoppe spillet når som helst på trinn 1 til 5. Dette betyr at det er maksimalt 5 muligheter til å spille, en for hver boks. Dersom spiller trekker joker vil han flytte direkte til trinn 5 og få høyeste premiesum, uavhengig av hvilket trinn han står på.

Det finnes forskjellige muligheter for å trekke de ukjent tall og jokere. Dette gir NT mulighet til å styre spillet. Avhengig av trekningsmekanisme kan det tallet som er ukjent for spiller bli likt det utdelte tallet. Det betyr at spiller ikke har mulighet til å vinne uansett valg. En mulig måte å løse dette problemet er ved å utelukke det udelte tallet når det tallet som er ukjente for spiller skal trekkes. Denne metoden vil vi kalle for *betinget trekning*. En annen trekningsmulighet er å la det ukjente tall som er bak boksen bli *joker* dersom det trekkes likt det utdelte tall i boksen. Denne trekningen kaller vi for *ubetinget trekning*. Den tredje måten er la det ukjente tall være et vinner tall (spiller flytter opp et trinn) dersom det er likt det utdelte tall. Denne type trekning kaller vi for *ubetinget vinner trekning*. I de tre treknings mekanismene beskrevet over kan vi legge til en eller flere jokere. Enkel sannsynlighetsregning viser at *betinget trekning* og *ubetinget trekning* gir de samme resultater. Vi bruker derfor kun en av de.

Vi skal se på sannsynlighetene for å havne på de fem ulike premietrinn i tillegg til starttrinnet som vi kaller trinn 0. Disse sannsynlighetene er avhengig av strategien en spiller har. I dette notatet skal vi se på 3 ulike strategier.

Strategi 1.	Optimal strategi
Strategi 2.	Spillers strategi
Strategi 3.	Uoptimal strategi.

Strategi 1 er optimal, d.v.s den strategien som gir størst sannsynlighet for å vinne høyeste premie. Vi tenker oss at en spiller kan være smart eller ikke smart i sine valg. Dersom synlig tall er 5 er det lik sannsynlighet for å gjette om det ukjente tall er over eller under. Dersom synlig tall er 6 vil det være større sannsynlighet for at det ukjente tallet er mindre enn 6 d.v.s. smart valg er "ned". Dersom en spiller er smart i sine valg vil optimal strategi være å alltid forsette spillet (ihvertfall med de differansene i premieutbetalingene mellom trinnene NT planlegger med). Dette er fordi det er større sannsynlighet for å vinne enn tape i hvert (av de 5 mulige) spill når spiller gjør smarte valg. Strategi 2 kaller vi *spillers strategi*. Her vil spiller velge smarte valg hele tiden, men spillet stoppes på trinn 4 avhengig av tallet som vises. Vi har valgt å studere denne strategien fordi den er meget realistisk. Spiller er trolig fornøyd med å komme seg til trinn 4 og ønsker ikke å risikere å tape, d.v.s.

lande på trinn 3, men dersom det oppgitte tallet er høyt eller lavt er spiller trolig mer villig til å spille videre. Denne strategien er kun beregnet analytisk. Strategi 3 er uoptimal strategi. Vi tenker oss at spiller gjør minst gunstige valg, men spiller maksimalt antall ganger. Optimal og uoptimal strategi vil utgjøre ytterpunkter i en reell spillersituasjon.

Vi skal se på hvordan sannsynlighetene for hvert trinn endrer seg med de ulike strategier og trekningsmekanismer. Av stor interesse er å vite hvor høy Jackpot kan bli med ulike omsetnings tall og ulike antagelser. Til å løse dette problemet bruker vi simulering.

2. Spiller maksimalt antall ganger

I denne seksjonen vil vi se på en strategi hvor det alltid spilles maksimalt antall ganger. Neste seksjon vil omhandle en strategi der spiller stopper avhengig av hvilke tall som vises for spiller. Her vil vi se på to ytterpunkter når det spilles maksimalt antall ganger. En optimal strategi der spiller gjør smarte valg og en uoptimal strategi der spiller aldri gjør smarte valg. Med smarte valg mener vi det valget som har høyest sannsynlighet for å være riktig. Tilsvarende er ikke smarte valg det valget som har lavest sannsynlighet for å være riktig. Primært ønsker vi å finne sansynlihetsfordelingen for at en spiller havner på de forskjellige trinn for førstepremie. La

$$\begin{aligned} A_i &= \text{Feil beslutning i i'te spill} \\ J_i &= \text{Joker i i'te spill} \\ B_j &= \text{Spiller står på trinn } j \text{ ved spillets slutt,} \end{aligned}$$

der $i = 1, \ldots, 5$ og $j = 0, 1, \ldots, 5$. I appendiks finner vi formler for de forskjellige sannsynligheter for B_j. Formelapparatet er uavhengig av hvilken av trekningsmekanismene vi ser på, men sannsynlighetene for begivenheten A_i og J_i vil forandre seg med type trekning. I tabellene nedenfor vil vi referere til forskjellige strategier og trekningsmetoder. Vi definerer:

Metode 1. Betinget trekning
Metode 2. Ubetinget vinner trekning.

I tabell 1 er det en relativ høy sannsynlighet for vinne høyeste førstepremie, uavhengig av strategi (smarte valg eller ikke smarte valg) så lenge spiller ikke stopper spillet. Når vi har to jokere vil sannsynligheten for å vinne høyeste førstepremie øke betraktelig. Forskjellen mellom å bruke betinget trekning og ubetinget vinner trekning er marginal.

Jokere	Trekning	Sannsynlighet for førstepremie på trinn 5 med bare jokere
1	Betinget	0.41
1	Ubetinget vinner	0.38
2	Betinget	0.63
2	Ubetinget vinner	0.60

Tabell 1. Sannsynlighet for å vinne førstepremie på trinn 5 med bare jokere for betinget trekning og ubetinget vinner trekning.

Når en spiller velger å spille maksimalt antall ganger vil sannsynlighetene for de forskjellige premietrinn kun være avhengig sannsynligheten for begivenheten A_i og J_i, se formler i appendiks. Sannsynligheten for A_2 er lik sannsynligheten for A_1, o.s.v. Sannsynligheten for begivenheten A_1 vil imidlertid være avhengig av om spiller velger optimal strategi eller uoptimal strategi, hvilken trekningsmetode og antall jokere vi bruker. Sannsynligheten for begivenheten J_1 er kun avhengig av treknings metode og antall jokere.

I tabell 2 er sannsynligheten for å havne på de ulike trinn presentert, avhengig av trekningsmetode, strategi og antall jokere. Ved siden av å beregne sannsynlighetene analytisk har vi også simulert spillet gjentatte ganger, og på den måten fått simulerte verdier for sannsynlighetene. Av tabell 2 og 3 ser vi at de simulerte verdiene stemmer svært bra med de sanne verdiene. Dette tyder på at analytiske beregningene er riktige. En annen

			sannsynligheter for å slutte på ulike trinn					
Jokere	Strategi	Trekning	Trinn 0	Trinn 1	Trinn 2	Trinn 3	Trinn 4	Trinn 5
1	Optimal	Betinget	0.0244	0.0854	0.0588	0.2058	0.0480	0.5776
1	Optimal	Ubetinget vinner	0.0193	0.0771	0.0540	0.2162	0.0509	0.5825
2	Optimal	Betinget	0.0152	0.0530	0.0365	0.1278	0.0298	0.7377
2	Optimal	Ubetinget vinner	0.0125	0.0499	0.0350	0.1399	0.0329	0.7298
1	Uoptimal	Betinget	0.2507	0.1832	0.0797	0.0582	0.0108	0.4174
1	Uoptimal	Ubetinget vinner	0.2114	0.1951	0.0944	0.0871	0.0171	0.3949
2	Uoptimal	Betinget	0.1557	0.1137	0.0495	0.0361	0.0067	0.6383
2	Uoptimal	Ubetinget vinner	0.1368	0.1263	0.0611	0.0564	0.0111	0.6084

TABELL 2. Tabellen viser sannsynligheter for at spiller havner på de forskjellige trinn i spillet med en eller to jokere, forskjellige strategier og treknings metoder.

				Simulerte sannsynligheter for å slutte på ulike trinn					
	Jokere	Strategi	Trekning	Trinn 0	Trinn 1	Trinn 2	Trinn 3	Trinn 4	Trinn 5
verdi	1	Optimal	Betinget	0.0237	0.0841	0.0591	0.2049	0.0488	0.5794
avvik	1	Optimal	Betinget	0.0005	0.0009	0.0008	0.0013	0.0007	0.0016
verdi	1	Optimal	Ubetinget vinner	0.0188	0.0758	0.0593	0.2073	0.0492	0.5895
avvik	1	Optimal	Ubetinget vinner	0.0018	0.0034	0.003	0.0052	0.0028	0.0064
verdi	2	Optimal	Betinget	0.0165	0.0543	0.0328	0.1325	0.0280	0.7358
avvik	2	Optimal	Betinget	0.0016	0.0029	0.0023	0.0044	0.0021	0.0057
verdi	2	Optimal	Ubetinget vinner	0.0108	0.0528	0.0368	0.1370	0.0328	0.7297
avvik	2	Optimal	Ubetinget vinner	0.0013	0.0029	0.0024	0.0044	0.0023	0.0057
verdi	1	Uoptimal	Betinget	0.2452	0.1742	0.0880	0.0612	0.0133	0.4182
avvik	1	Uoptimal	Betinget	0.0056	0.0049	0.0037	0.0031	0.0015	0.0064
verdi	1	Uoptimal	Ubetinget vinner	0.2155	0.1963	0.0918	0.0836	0.0178	0.3950
avvik	1	Uoptimal	Ubetinget vinner	0.0041	0.004	0.0029	0.0028	0.0013	0.0049
verdi	2	Uoptimal	Betinget	0.1540	0.1125	0.0505	0.0337	0.0073	0.6420
avvik	2	Uoptimal	Betinget	0.0047	0.0041	0.0028	0.0023	0.0011	0.0062
verdi	2	Uoptimal	Ubetinget vinner	0.1373	0.1228	0.0545	0.0568	0.0098	0.6187
avvik	2	Uoptimal	Ubetinget vinner	0.0044	0.0042	0.0029	0.0030	0.0013	0.0063

TABELL 3. Tabellen viser simulerte sannsynligheter og avvik for at spiller havner på de forskjellige trinn i spillet med en eller to jokere, forskjellige strategier og treknings metoder.

indikasjon på at de analytiske beregningene er riktige er når summen av sannsynlighetene for de forskjellige trinn er lik 1. P.g.a. tilnærmingen vi har gjort i tabellene vil summen kun være tilnærmet lik 1. Førsteforfatter har imidlertid sjekket at uten tilnærming er summene lik 1. Videre er det svært liten forskjell mellom de to trekningsmetoder. De store forskjeller ser vi når vi går fra en joker til to jokere. Bruk av to jokere vil selvsagt gi høyere sannsynlighet for å få høyeste premie. Interessant er det også å se at det er svært liten sannsynlighet for at spiller lander på starttrinnet ved optimal strategi. Det er også stor forskjell mellom det å bruke optimal strategi og uoptimal strategi. Uoptimal Strategi vil svært sjeldent bli tatt i bruk av en spiller og er kun ment å vise hvor dårlig en spiller kan komme ut ved å foreta dårlige valg. Neste seksjon viser en mer realistisk situasjon som vil bli sammenlignet med optimal strategi.

3. Spillers strategi

Spillers strategi har vi kalt den strategien der spiller stopper på trinn 4 avhengig av hvilket tall spiller får oppgitt. Denne strategien antar vi at mange spillere vil følge. Vi vil kun beregne denne strategien analytisk. Dersom det oppgitte tall er enten høyt eller lavt er sannsynligheten stor for å ta riktig beslutning med smarte valg, d.v.s. spiller er mer interessert i å gamble i slike situasjoner. Det er dette bildet vi vil prøve å gjenskape ved å sette opp sannsynligheter for å spille gitt at vi vet tallet spiller får oppgitt. Siden det er en symmetri for høye og lave tall vil sannsynlighetene gjenspeile dette. Oppførsel til spillere er vanskelig å si på forhånd før spillet settes i gang. Sannsynlighetene i tabell 4 er kun ment som indikasjon på hvordan spillere kan tenkes å oppføre seg. La Z_4 være tallet som vises for spiller i 4 spilleomgang.

$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 0\}$	1.0
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 1\}$	0.7
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 2\}$	0.5
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 3\}$	0.2
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 4\}$	0.1
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 5\}$	0.1
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 6\}$	0.2
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 7\}$	0.5
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 8\}$	0.7
$\Pr\{\text{Spille videre}\mid Z_4 = 9\}$	1.0

Tabell 4. Betingede sannsynligheter for å fortsette spillet.

På samme måte som for optimal og uoptimal strategi ønsker vi å finne sannsynligheten for de forskjellige førstepremier avhengig av antall jokere og hvilken trekningsmetode NT bruker.

Jokere	Strategi	Trekning	Trinn 0	Trinn 1	Trinn 2	Trinn 3	Trinn 4	Trinn 5
1	Spillers	Betinget	0.0244	0.0854	0.0588	0.1818	0.1681	0.4815
1	Spillers	Ubetinget vinner	0.0193	0.0771	0.0540	0.1907	0.1907	0.4681
2	Spillers	Betinget	0.0152	0.0530	0.0365	0.1129	0.1118	0.6706
2	Spillers	Ubetinget vinner	0.0125	0.0499	0.0350	0.1235	0.1317	0.6475

Tabell 5. Tabellen viser sannsynligheter for at spiller havner på de forskjellige trinn i spillet med en eller to jokere, spillers strategi og 2 trekningsmetoder.

Tabell 5 bør sammenlignes med tabell 2. Sannsynligheten for å lande på trinn $0, 1, 2$ er den samme for optimal strategi og spillers strategi. Dette kan forklares ved at spiller kun stopper spillet når han har vunnet de 4 første gangene og dermed kan han ikke komme lenger ned enn trinn 3 med et spill igjen. På grunn av at spiller kan stoppe spillet på trinn 4 vil sannsynlighetene for å lande på trinn 4 bli høyere ved bruk av spillers strategi. Dette bidrar til at trinn 3 og 5 sjeldnere blir nådd og sannsynlighetene for disse trinn minker i forhold til optimal strategi. Tabell 5 gjenspeiler disse forhold.

4. Premieutbetaling for spiller

Nå er utbetalingene for de forskjellig trinn avhengig av omsetning og om det er Jackpot. Ved Jackpot tilføres penger fra siste spilleomgang dersom spiller ikke nådde høyeste premietrinn. Definer utbetaling som

$$U_{j,k} = \text{Utbetaling for } j\text{'te trinn i } k\text{'te spilleomgang.}$$

Definer også

$$\begin{aligned} S_k &= \text{k'te spillers utbetaling} \\ O_k &= \text{k'te omgangs omsetning} \\ T_k &= \text{Trinn ved spillets slutt i } k\text{'te spilleomgang.} \end{aligned}$$

Da får vi at

$$S_k = \sum_{j=0}^{5} U_{j,k} I\{T_k = j\}, \tag{1}$$

der $I\{T_k = j\}$ er lik 1 hvis $T_k = j$ og 0 ellers. Sammenhengen mellom utbetaling for de forskjellige trinn og omsetning/Jackpot er gitt av NT. Høyeste førstepremietrinn får 20% av total omsetning. Dessuten blir det tilført differansen mellom høyeste førstepremietrinn og den faktisk utbetaling fra forige spilleomgang. Dette gir oss høyeste førstepremietrinn gitt ved formlene

$$U_{5,k} = 0.2 * O_k + (U_{5,k-1} - S_{k-1}). \tag{2}$$

Med $U_{5,k}$ på plass kan vi beregne utbetalingene på de andre trinnene, gitt av NT.

$$\begin{aligned} U_{0,k} &= 0.20 * U_{5,k} \\ U_{1,k} &= 0.30 * U_{5,k} \\ U_{2,k} &= 0.40 * U_{5,k} \\ U_{3,k} &= 0.55 * U_{5,k} \\ U_{4,k} &= 0.75 * U_{5,k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Fra lign. (1) og (3) får vi

$$S_k = U_{5,k} V_k, \tag{4}$$

der

$$\begin{aligned} V_k = {} & 0.20 * I\{T_k = 0\} + 0.30 * I\{T_k = 1\} + 0.40 * I\{T_k = 2\} \\ & +0.55 * I\{T_k = 3\} + 0.75 * I\{T_k = 4\} + I\{T_k = 5\}. \end{aligned}$$

Vi er interessert i å finne ut hvor stor førstepremiesum som blir overført fra en spilleomgang til en annen, d.v.s. $U_{5,k} - S_k$. Dersom formel (2) brukes flere ganger sammen med (4) får vi

$$\begin{aligned} U_{5,k} - S_k &= U_{5,k}(1 - V_k) \\ &= 0.2 * \sum_{j=1}^{k} O_j \prod_{r=j}^{k} (1 - V_r). \end{aligned}$$

NT ønsker ikke for høy omsetning siden det kan føre til konkurranse med Lotto. En måte omsetningen til JOKER kan øke på er når det overføres mye penger fra sist spilleomgang. Det er derfor ønskelig å kunne styre at høyeste førstepremien ikke blir for stor. Dette gjøres ved å styre trekningsmetode og antall jokere. Siden høyeste førstepremie er så viktig skal vi analysere hvordan den oppfører seg over tid med forskjellige omsetninger.

Høyeste førstepremie, d.v.s. førstepremie på trinn 5 for k'te spilleomgang er definer ved $U_{5,k}$:

$$U_{5,k} = 0.2 * O_k + 0.2 * \sum_{j=1}^{k-1} O_j \prod_{r=j}^{k-1} (1 - V_r). \quad (5)$$

Videre beregninger avhenger av antagelser vi gjør for O_j og V_r. Rimelig antagelser er at $V_1, V_2, \ldots$ er uavhengige identisk fordelte og $V_1, V_2, \ldots$ uavhengig av omsetning O_j, $j = 1, 2, \ldots$. Før JOKER igansettes vil det være usikkert hvilket nivå omsetningen vil ligge på. Dersom omsetning O_k multipliseres med en konstant c, d.v.s. $c * O_k$ vil høyeste førstepremietrinn bli $c * U_{5,k}$, se lign. (2). Dette betyr at en multiplikativ effekt på omsetning overføres til høyeste førstepremietrinn. Den samme effekten vil gjelde for differansen mellom høyeste førstepremie og den reelle premie spiller får. Dette betyr at vi kun trenger å simulere for et omsetningsnivå. Alle andre omsetninger som er av multiplikativ art vil dermed være gitt. En skal imidlertid være klar over at dersom fordelingen til omsetningen O_k har forventning $\mu \neq 0$ og standard avvik σ vil $c * O_k$ gi forventning $c * \mu$ og standard avvik $c * \sigma$. Dersom vi vil ha en additiv effekt på omsetning, d.v.s. at variasjonen er den samme på ulike omsetnings-nivåer må dette simuleres.

5. Simulert spill

Vi vil simulere forskjellige spill der omsetning varierer eller er konstant. Dersom nivået er for høyt eller lavt kan den multiplikative effekten brukes. Simuleringen vil bli utført for omsetninger $O_k * c$, der $c = 1$. Tabeller og Figurer kan justeres for andre valg av konstant c. For å simulere et spill er vi avhengig av noen antagelser. Vi må vite hva nivået og varisjonen til omsetning skal være. NT er interessert i omsetning fra 5 mill. til 12.5 mill. Etter diskusjon med NT valgte vi 3 mulig måter å velge omsetning på:

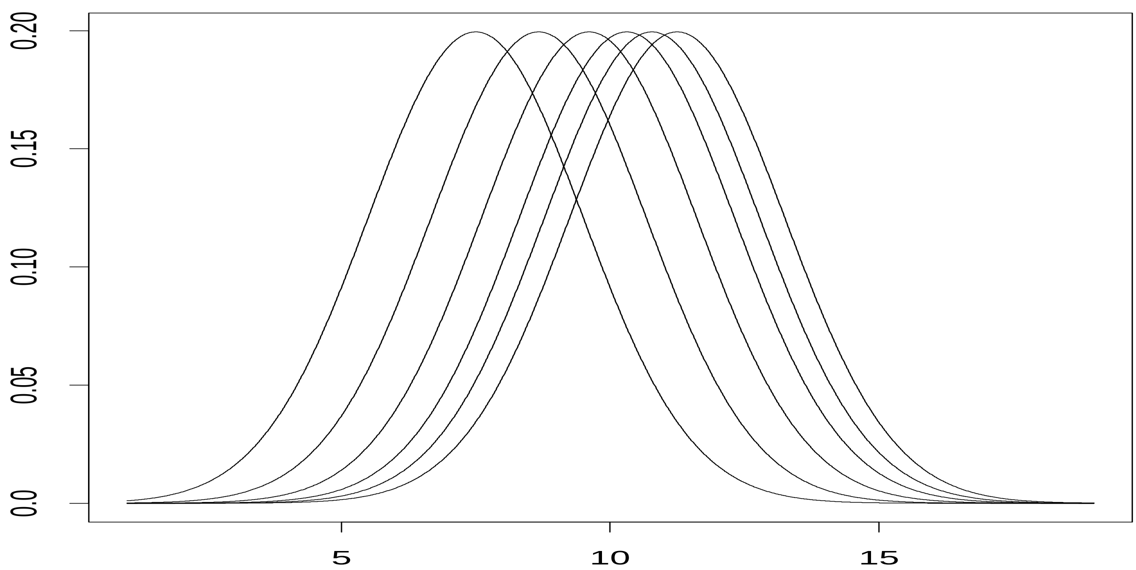
Fordeling 1. Flat omsetning
Fordeling 2. Fordeling varierer.
Fordeling 3. Flat trinnvis omsetning der omsetning kun er avhengig av hvilket trinn spiller landet på i forige spilleomgang.

Fordeling 1 varierer ikke, men er flat på 5 mill. Fordeling 2 er valgt på følgende måte. Omsetning varierer og kommer fra normalfordeling med forventning 7.5 mill. og standard avvik på 2.0 mill. (avkutting i 3 mill.) dersom det ikke er Jackpot. Dersom det er Jackpot vil omsetningsfordeling være avhengig av størrelsen på Jackpot. Dersom Jackpot har hele førstepremien fra forige gang vil omsetning øke med omtrent 50% (Norsk Tippings antagelse). Dersom vi bruker at det er en lineær trend i økning av premiepot får vi følgende

$$(6) \qquad O_k \sim N_{3+}(7.5, 2) + 7.5 * [0.5 * I\{T_{k-1} = 0\} + 0.4375 * I\{T_{k-1} = 1\} \\ +0.375 * I\{T_{k-1} = 2\} + 0.28125 * I\{T_{k-1} = 3\} \\ +0.15625 * I\{T_{k-1} = 4\} + 0 * I\{T_{k-1} = 5\}]$$

der $N_{3+}(7.5, 2)$ betyr normalfordeling med forventning 7.5 og standard avvik 2 med avkuttingspunkt i 3. I Figur 1 viser vi fordelingen 2, der kurvene fra venstre til høyre er alt fra fordeling uten Jackpot ($T_{k-1} = 5$) til Jackpot med høyeste premie ($T_{k-1} = 0$).

Fordeling 3 er gitt ved



Figur 1. Ulike fordelinger for omsetning avhengig av trinn spiller landet på i forige spilleomgang.

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad O_k \quad \sim \quad & 5 + 5 * [0.5 * I\{T_{k-1} = 0\} + 0.4375 * I\{T_{k-1} = 1\} \\
& +0.375 * I\{T_{k-1} = 2\} + 0.28125 * I\{T_{k-1} = 3\} \\
& +0.15625 * I\{T_{k-1} = 4\} + 0 * I\{T_{k-1} = 5\}] \,.
\end{aligned}
$$

Denne fordelingen avhenger av hvilket førstepremietrinn spiller landet på i forige spilleomgang.

Med konstant og varierende omsetning kan vi simulere spillet. Ut fra simuleringene er det mulig å finne sannsynligheten for at høyeste førstepremietrinn vil være over en viss grense. Vi har valgt ulike grenser avhengig av fordelingen til omsetning og tabellert de simulerte sannsynlighetene sammen med usikkerhets anslag. Dessuten har vi tabellert forventet omsetning og forventet førstepremie på trinn 5 sammen med usikkerhets anslag.

	simulerte verdier					
	En Joker			To Jokere		
Sannsynlighet	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 1.7}	0.1396	0.1456	0.4386	0.0572	0.0589	0.2300
avvik	0.0009	0.0011	0.0012	0.0008	0.0009	0.0008
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.0}	0.0584	0.0564	0.3073	0.0206	0.0196	0.1154
avvik	0.0006	0.0007	0.0015	0.0004	0.0004	0.0010
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.3}	0.0145	0.0143	0.2143	0.0037	0.0039	0.0660
avvik	0.0004	0.0004	0.0014	0.0002	0.0002	0.0006
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.6}	0.0031	0.0026	0.1266	0.0005	0.0006	0.0273
avvik	0.0002	0.0002	0.0012	0.0001	0.0001	0.0006
E{Omsetning}	5	5	5	5	5	5
avvik	0	0	0	0	0	0
E{Førstepremie på trinn 5}	1.2833	1.3096	1.6850	1.1595	1.1738	1.3390
avvik	0.0008	0.0013	0.0022	0.0008	0.0010	0.0014

TABELL 6. Simulerte sannsynligheter for å være over et visst nivå, forventet omsetning og forventet førstepremie på trinn 5. Simulerer flat omsetning lik 5. Bruker betinget trekning.

	simulerte verdier					
	En Joker			To Jokere		
Sannsynlighet	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 1.7}	0.1265	0.1332	0.4325	0.0551	0.0575	0.2290
avvik	0.0019	0.0010	0.0017	0.0008	0.0005	0.0014
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.0}	0.0483	0.0472	0.3090	0.0191	0.0182	0.1241
avvik	0.0009	0.0007	0.0015	0.0005	0.0003	0.0010
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.3}	0.0111	0.0107	0.1998	0.0031	0.0032	0.0647
avvik	0.0004	0.0003	0.0017	0.0002	0.0002	0.0008
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.6}	0.0020	0.0018	0.1126	0.0004	0.0003	0.0260
avvik	0.0002	0.0001	0.0013	0.0001	0.0001	0.0006
E{Omsetning}	5	5	5	5	5	5
avvik	0	0	0	0	0	0
E{Førstepremie på trinn 5}	1.2696	1.3003	1.6758	1.1591	1.1791	1.3547
avvik	0.0018	0.0010	0.0025	0.0010	0.0008	0.0017

TABELL 7. Simulerte sannsynligheter for å være over et visst nivå, forventet omsetning og forventet førstepremie på trinn 5. Simulerer flat omsetning lik 5. Bruker ubetinget vinner trekning.

	simulerte verdier					
	En Joker			To Jokere		
Sannsynlighet	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 3.0}	0.3297	0.3539	0.5553	0.1988	0.2074	0.3407
avvik	0.0015	0.0013	0.0013	0.0011	0.0012	0.0015
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 3.5}	0.2178	0.2214	0.4865	0.1169	0.1167	0.2777
avvik	0.0013	0.0012	0.0014	0.0010	0.0011	0.0015
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 4.0}	0.1202	0.1215	0.3878	0.0552	0.0557	0.1920
avvik	0.0009	0.0011	0.0012	0.0008	0.0009	0.0012
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 4.5}	0.0584	0.0598	0.3013	0.0225	0.0230	0.1225
avvik	0.0006	0.0009	0.0013	0.0005	0.0006	0.0011
E{Omsetning}	8.5656	8.6332	9.4152	8.1902	8.2452	8.7257
avvik	0.0076	0.0050	0.0059	0.0067	0.0062	0.0062
E{Førstepremie på trinn 5}	2.1923	2.2593	3.1629	1.8977	1.9348	2.3380
avvik	0.0030	0.0031	0.0054	0.0027	0.0027	0.0049

TABELL 8. Simulerte sannsynligheter for å være over et visst nivå, forventet omsetning og forventet førstepremie på trinn 5. Simulerer omsetning med fordeling 2. Bruker betinget trekning.

Vi har sett at det å bruke betinget trekning og ubetinget vinner trekning gav liten forskjell i sannsynlighetene for de forskjellige førstepremier. Den samme trenden viser seg når vi simulerer spillet. Sannsynlighetene for å ligge over de forskjellige nivåene er svært like. Dette gjelder også forventet omsetning og forventet førstepremie på trinn 5. Når det gjelder de forskjellige strategier er det liten forskjell mellom optimal strategi og spillers strategi. Forventet omsetning for spillers strategi øker litt i forhold til optimal strategi når vi bruker varierende omsetning. Dette kan forklares med at sannsynligheten for førstepremie på trinn 5 er lavere for spillers strategi enn optimal strategi. Det betyr at

	simulerte verdier					
	En Joker			To Jokere		
Sannsynlighet	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 3.0}	0.3220	0.3515	0.5694	0.1992	0.2141	0.3573
avvik	0.0015	0.0016	0.0018	0.0012	0.0013	0.0014
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 3.5}	0.2051	0.2144	0.4948	0.1159	0.1162	0.2861
avvik	0.0013	0.0011	0.0021	0.0009	0.0012	0.0014
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 4.0}	0.1079	0.1138	0.3944	0.0522	0.0531	0.1962
avvik	0.0011	0.0009	0.0019	0.0005	0.0008	0.0013
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 4.5}	0.0518	0.0536	0.3050	0.0206	0.0217	0.1265
avvik	0.0008	0.0007	0.0020	0.0004	0.0005	0.0011
E{Omsetning}	8.5354	8.6281	9.4253	8.1955	8.2684	8.7592
avvik	0.0065	0.0080	0.0077	0.0057	0.0065	0.0077
E{Førstepremie på trinn 5}	2.1676	2.2501	3.1752	1.8989	1.9506	2.3718
avvik	0.0035	0.0032	0.0086	0.0025	0.0031	0.0044

Tabell 9. Simulerte sannsynligheter for å være over et visst nivå, forventet omsetning og forventet førstepremie på trinn 5. Simulerer omsetning med fordeling 2. Bruker ubetinget vinner trekning.

	simulerte verdier					
	En Joker			To Jokere		
Sannsynlighet	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 1.7}	0.3817	0.3667	0.5748	0.2343	0.2187	0.3559
avvik	0.0013	0.0020	0.0014	0.0012	0.0014	0.0013
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.0}	0.2159	0.2088	0.5140	0.1076	0.1024	0.3000
avvik	0.0015	0.0017	0.0013	0.0010	0.0010	0.0013
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.3}	0.0929	0.0993	0.3234	0.0323	0.0347	0.1227
avvik	0.0011	0.0011	0.0017	0.0006	0.0006	0.0011
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.6}	0.0618	0.0595	0.3077	0.0220	0.0203	0.1145
avvik	0.0008	0.0009	0.0016	0.0005	0.0004	0.0011
E{Omsetning}	5.6869	5.7318	6.2643	5.4255	5.4591	5.7851
avvik	0.0025	0.0030	0.0029	0.0022	0.0021	0.0029
E{Førstepremie på trinn 5}	1.4582	1.4967	2.1056	1.2564	1.2792	1.5447
avvik	0.0022	0.0025	0.0047	0.0016	0.0015	0.0028

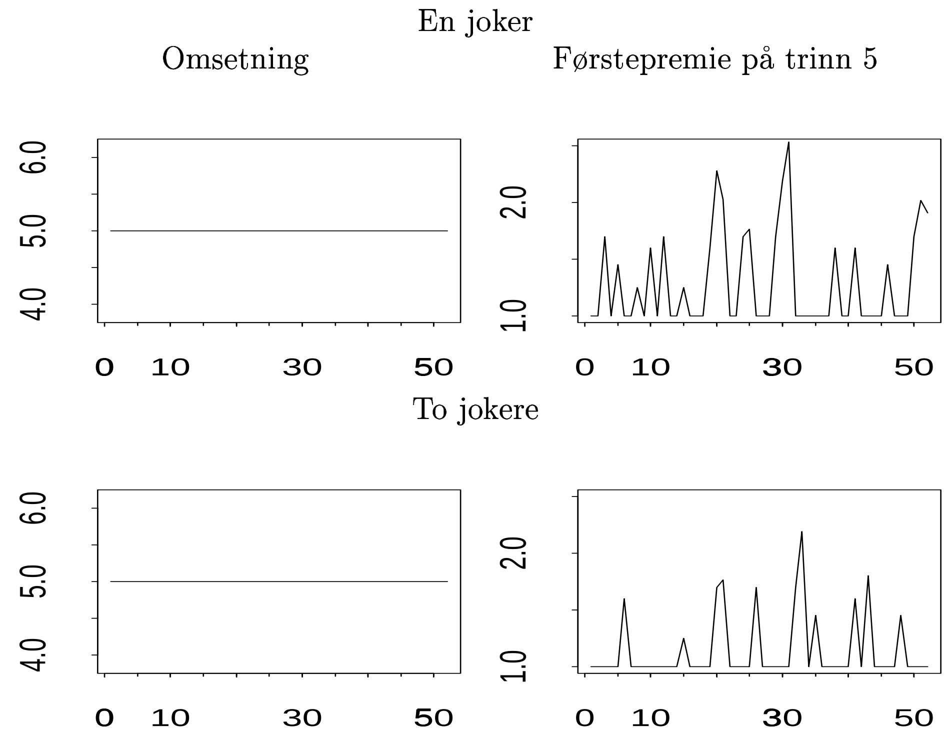
Tabell 10. Simulerte sannsynligheter for å være over et visst nivå, forventet omsetning og forventet førstepremie på trinn 5. Simulerer omsetning med fordeling 3. Bruker betinget trekning.

det overføres mer til neste spilleomgang og høyere omsetning oppnås.

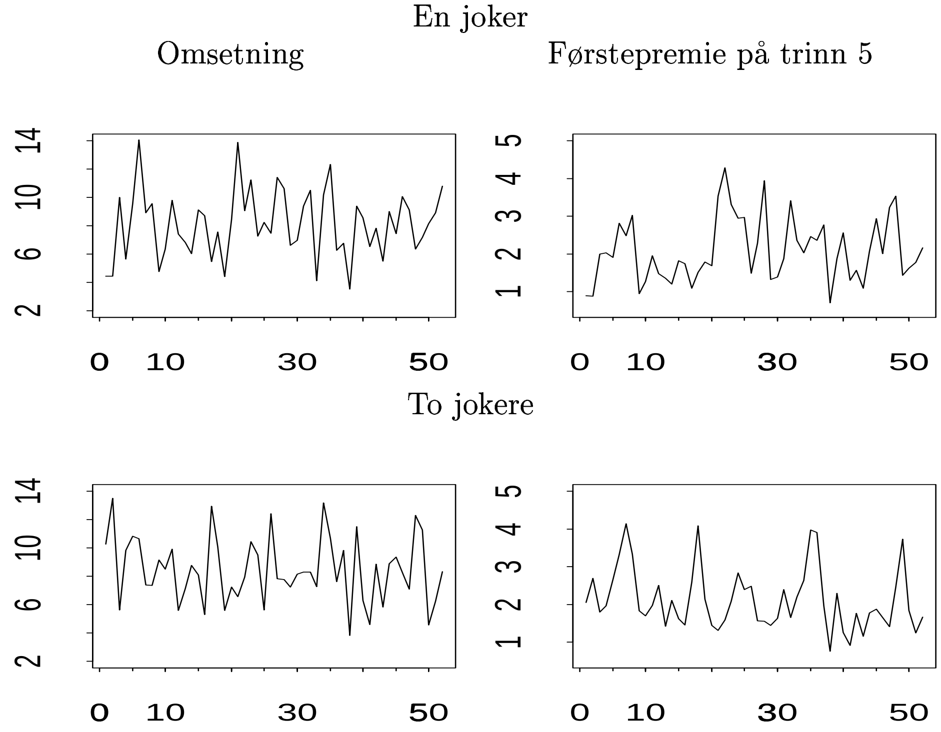
	simulerte verdier					
	En Joker			To Jokere		
Sannsynlighet	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi	optimal strategi	spillers strategi	uoptimal strategi
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 1.7}	0.3750	0.3621	0.5968	0.2388	0.2238	0.3822
avvik	0.0014	0.0012	0.0016	0.0010	0.0012	0.0014
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.0}	0.2029	0.1985	0.5198	0.1052	0.1027	0.3071
avvik	0.0014	0.0013	0.0021	0.0009	0.0010	0.0011
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.3}	0.0837	0.0930	0.3399	0.0308	0.0352	0.1382
avvik	0.0009	0.0011	0.0024	0.0007	0.0007	0.0012
Pr{Førstepremie på trinn 5 > 2.6}	0.0538	0.0528	0.3163	0.0197	0.0200	0.1250
avvik	0.0008	0.0008	0.0024	0.0005	0.0005	0.0011
E{Omsetning}	5.6655	5.7276	6.2704	5.4271	5.4748	5.8179
avvik	0.0025	0.0017	0.0035	0.0017	0.0021	0.0026
E{Førstepremie på trinn 5}	1.4405	1.4932	2.1101	1.2573	1.2915	1.5759
avvik	0.0021	0.0017	0.0060	0.0012	0.0016	0.0028

TABELL 11. Simulerte sannsynligheter for å være over et visst nivå, forventet omsetning og forventet førstepremie på trinn 5. Simulerer omsetning med fordeling 3. Bruker ubetinget vinner trekning.

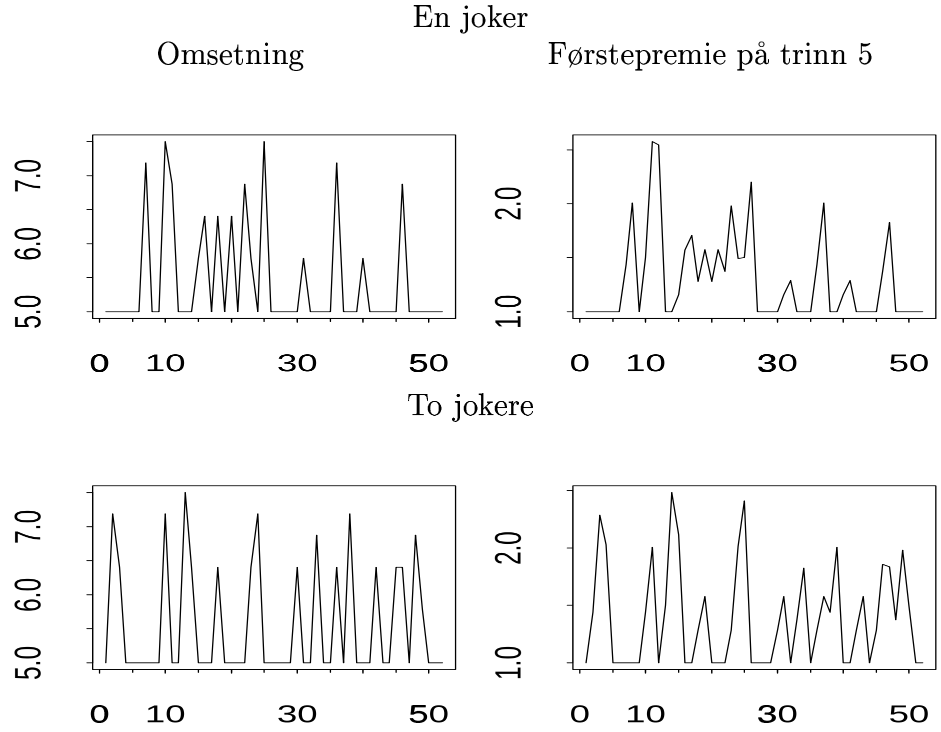
For å få en visuell forståelse av hvordan høyeste premiesum vil utvikle seg for ulike omsetninger har vi plottet et forløp på 52 uker. Vi har kun sett på optimal strategi og brukt betinget trekning. Figur 2 til 4 har omsetningsfordelingene 1 til 3. For å sammenligne har vi lagt under hverandre plot for en og to jokere. På samme måte som vi har sett i tabellene over ser vi at Figur 2 til 4 gir mindre utbetaling av høyest førstepremietrinn når vi bruke to jokere i stedet for en. Videre er det ikke så stor forskjell når vi sammenligner fordeling 1 og 3. Fordeling 2 gir høyere utbetaling for høyest premietrinn. Noe av dette skyldes at omsetningen er høyere for fordeling 2 enn fordeling 1, men ikke alt. Dersom vi skalerer opp fordeling 3 slik at forventet omsetning blir den samme som for fordeling 2 vil fordeling 2 ha en høyere variasjon. Dette betyr at høyere variasjon i omsetning kan bety øket utbetaling for høyeste førstepremietrinn. For å fastslå dette sikkert må imidlertid dette sjekkes ved simulering.



FIGUR 2. Omsetning er fast lik 5 mill. Optimal strategi og betinget trekning er brukt. Figurene viser omsetning og førstepremie på trinn 5 i løpet av 52 spilleomganger.



FIGUR 3. Omsetnings fordeling er 2. Optimal Strategi og betinget trekning er brukt. Figurene viser omsetning og førstepremie på trinn 5 i løpet av 52 spilleomganger.



FIGUR 4. Omsetnings fordeling er 3. Optimal strategi og betinget trekning er brukt. Figurene viser omsetning og førstepremie på trinn 5 i løpet av 52 spilleomganger.

APPENDIKS A. BEREGNING AV SANNSYNLIGHETER MED MAKSIMALT ANTALL SPILLEOMGANGER

Definer

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A}_i &= \text{Riktig beslutning i i'te spill men får ikke Joker} \\
J_i^C &= \text{Ikke Joker i i'te spill.}
\end{aligned}
$$

der $i = 1, \ldots, 5$ og $j = 0, 1, \ldots, 5$. Vi er intressert i å beregne sannsynligheten for at spiller lander på de forskjellige trinn. De formlene vi skal beregne vil gjelde for både optimal og uoptimal strategi. Sannsynligheten for å bli i start trinn finner vi ved:

$$
\begin{aligned}
\Pr\{B_0\} = \; & \Pr\{(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup \\
& (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \widetilde{A}_4 \cap A_5) \cup \\
& (A_1 \cap A_2 \cap \widetilde{A}_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup \\
& (A_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup \\
& (\widetilde{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup \\
& (A_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap A_3 \cap \widetilde{A}_4 \cap A_5) \cup \\
& (\widetilde{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \widetilde{A}_4 \cap A_5) \cup \\
& (A_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap \widetilde{A}_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup \\
& (\widetilde{A}_1 \cap A_2 \cap \widetilde{A}_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup \\
& (\widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\}.
\end{aligned}
$$

På grunn av at begivenhetene er disjunkte har vi:

$$
\begin{aligned}
\Pr\{B_0\} = \; & \Pr\{(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \widetilde{A}_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(A_1 \cap A_2 \cap \widetilde{A}_3 \cap A_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(A_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(\widetilde{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(A_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap A_3 \cap \widetilde{A}_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(\widetilde{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \widetilde{A}_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(A_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap \widetilde{A}_3 \cap A_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(\widetilde{A}_1 \cap A_2 \cap \widetilde{A}_3 \cap A_4 \cap A_5)\} \\
& + \Pr\{(\widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)\}.
\end{aligned}
$$

På grunn av uavhengighet får vi:

$$\begin{aligned}
\Pr\{B_0\} &= \Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{A_5\}.
\end{aligned}$$

På grunn av at hvert av spillene ved de 5 boksene er like får vi:

$$\begin{aligned}
\Pr\{B_0\} &= \Pr\{A_1\}^5 + 4\Pr\{A_1\}^4(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})\\
&\quad+5\Pr\{A_1\}^3(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^2.
\end{aligned}$$

Merk at $\Pr\{\tilde{A}_1\} = 1 - \Pr\{A_1\} - \Pr\{J_1\}$. Før vi finner $\Pr\{A_1\}$ og $\Pr\{J_1\}$ skal vi finne tilsvarende formler for at spiller står på trinn 1, 2, 3, 4 eller 5. Utregningene gir:

$$\begin{aligned}
\Pr\{B_1\} &= \Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{A_5\}\\
&= \Pr\{A_1\}^4(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\}) + 4\Pr\{A_1\}^3(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^2\\
&\quad+5\Pr\{A_1\}^2(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\{B_2\} &= \Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\\
&\quad+\Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\}\\
&= \Pr\{A_1\}^3(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^2\\
&\quad+4\Pr\{A_1\}^2(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\{B_3\} &= \Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\
&\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\
&\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\
&\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\
&\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\} \\
&= \Pr\{A_1\}^2(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^3 \\
&\quad +4\Pr\{A_1\}(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\{B_4\} &= \Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\
&= \Pr\{A_1\}(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr\{B_5\} &= \Pr\{(\widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap \widetilde{A}_3 \cap \widetilde{A}_4 \cap \widetilde{A}_5) \cup \\
&\quad \text{(Joker i en av spille-omgangene)}\} \\
&= \Pr\{(\widetilde{A}_1 \cap \widetilde{A}_2 \cap \widetilde{A}_3 \cap \widetilde{A}_4 \cap \widetilde{A}_5) \cup \\
&\quad (J_1^C \cap J_2^C \cap J_3^C \cap J_4^C \cap J_5) \cup \\
&\quad (J_1^C \cap J_2^C \cap J_3^C \cap J_4) \cup \\
&\quad (J_1^C \cap J_2^C \cap J_3) \cup (J_1^C \cap J_2) \cup (J_1)\} \\
&= (1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^5 + (1-\Pr\{J_1\})^4\Pr\{J_1\} + (1-\Pr\{J_1\})^3\Pr\{J_1\} \\
&\quad +(1-\Pr\{J_1\})^2\Pr\{J_1\} + (1-\Pr\{J_1\})\Pr\{J_1\} + \Pr\{J_1\}.
\end{aligned}$$

La Z_i være tallet som vises for spiller i i'te trinn, d.v.s. $Z_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Nå gjenstår det å finne $\Pr\{A_1\}$

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1\} &= \Pr\{A_1 \cap (\bigcup_{i=0}^{9}(Z_1 = i))\} \\
&= \Pr\{\bigcup_{i=0}^{9}(A_1 \cap (Z_1 = i))\} \\
&= \sum_{i=0}^{9}\Pr\{A_1 \cap (Z_1 = i)\} \\
&= \sum_{i=0}^{9}\Pr\{A_1|Z_1 = i\}\Pr\{Z_1 = i\} \\
&= \Pr\{Z_1 = 1\}\sum_{i=0}^{9}\Pr\{A_1|Z_1 = i\}.
\end{aligned}$$

Sannsynlighetene $\Pr\{A_1|Z_1 = i\}$ og $\Pr\{Z_1 = i\}$ er avhengig av om vi velger en eller flere jokere og om vi bruker *betinget trekning* eller *ubetinget vinner trekning.*

Appendiks B. Beregning av sannsynligheter med optimal strategi

Anta at vi har en joker og bruker betinget trekning. Da vil

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1\} &= \Pr\{Z_1 = 1\} \sum_{i=0}^{9} \Pr\{A_1 | Z_1 = i\} \\
&= \frac{1}{10}\left(0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + 0\right) \\
&= \frac{2}{10}. \\
\Pr\{J_1\} &= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Dersom vi bruker betinget trekning og to jokere får vi

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1\} &= \Pr\{Z_1 = 1\} \sum_{i=0}^{9} \Pr\{A_1 | Z_1 = i\} \\
&= \frac{1}{10}\left(0 + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{4}{11} + \frac{3}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + 0\right) \\
&= \frac{2}{11}. \\
\Pr\{J_1\} &= \frac{2}{11}.
\end{aligned}$$

Anta nå at vi har en joker og bruker *ubetinget vinner trekning.* Da vil

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1\} &= \Pr\{Z_1 = 1\} \sum_{i=0}^{9} \Pr\{A_1 | Z_1 = i\} \\
&= \frac{1}{10}\left(0 + \frac{1}{11} + \frac{2}{11} + \frac{3}{11} + \frac{4}{11} + \frac{4}{11} + \frac{3}{11} + \frac{2}{11} + \frac{1}{11} + 0\right) \\
&= \frac{2}{11}. \\
\Pr\{J_1\} &= \frac{1}{11}.
\end{aligned}$$

Dersom vi bruker *ubetinget vinner trekning* og to jokere får vi

$$\begin{aligned}
\Pr\{A_1\} &= \Pr\{Z_1 = 1\} \sum_{i=0}^{9} \Pr\{A_1 | Z_1 = i\} \\
&= \frac{1}{10}\left(0 + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} + 0\right) \\
&= \frac{2}{12}. \\
\Pr\{J_1\} &= \frac{2}{12}.
\end{aligned}$$

Appendiks C. Beregning av sannsynligheter med uoptimal strategi

Beregning av formlene for sannsynligheter av begivenhetene $B_0, \dots, B_5$ er på samme måte som for optimal strategi. Det som er forskjellig er sannsynligheten for feil beslutning, d.v.s

A_1. Anta først at vi har en joker og bruker betinget trekning.

$$\begin{aligned}\Pr\{A_1\} &= \Pr\{Z_1 = 1\}\sum_{i=0}^{9}\Pr\{A_1|Z_1 = i\} \\ &= \frac{1}{10}\left(0+\frac{8}{10}+\frac{7}{10}+\frac{6}{10}+\frac{5}{10}+\frac{5}{10}+\frac{6}{10}+\frac{7}{10}+\frac{8}{10}+0\right) \\ &= \frac{52}{100}. \\ \Pr\{J_1\} &= \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Dersom vi bruker *betinget trekning* og to jokere får vi

$$\begin{aligned}\Pr\{A_1\} &= \Pr\{Z_1 = 1\}\sum_{i=0}^{9}\Pr\{A_1|Z_1 = i\} \\ &= \frac{1}{10}\left(0+\frac{8}{11}+\frac{7}{11}+\frac{6}{11}+\frac{5}{11}+\frac{5}{11}+\frac{6}{11}+\frac{7}{11}+\frac{8}{11}+0\right) \\ &= \frac{52}{110}. \\ \Pr\{J_1\} &= \frac{2}{11}.\end{aligned}$$

Anta nå at vi har en joker og bruker *ubetinget vinner trekning.*

$$\begin{aligned}\Pr\{A_1\} &= \Pr\{Z_1 = 1\}\sum_{i=0}^{9}\Pr\{A_1|Z_1 = i\} \\ &= \frac{1}{10}\left(0+\frac{8}{11}+\frac{7}{11}+\frac{6}{11}+\frac{5}{11}+\frac{5}{11}+\frac{6}{11}+\frac{7}{11}+\frac{8}{11}+0\right) \\ &= \frac{52}{110}. \\ \Pr\{J_1\} &= \frac{1}{11}.\end{aligned}$$

Dersom vi bruker *ubetinget vinner trekning* og to jokere får vi

$$\begin{aligned}\Pr\{A_1\} &= \Pr\{Z_1 = 1\}\sum_{i=0}^{9}\Pr\{A_1|Z_1 = i\} \\ &= \frac{1}{10}\left(0+\frac{8}{12}+\frac{7}{12}+\frac{6}{12}+\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{6}{12}+\frac{7}{12}+\frac{8}{12}+0\right) \\ &= \frac{52}{120}. \\ \Pr\{J_1\} &= \frac{2}{12}.\end{aligned}$$

Appendiks D. Beregning av sannsynligheter med vinner strategi

Denne strategien vil være veldig lik den optimale strategien hvor vi gjør smarte valg hele tiden. Den eneste forskjellen er at dersom vi når trinn 4 så tar spiller et valg om han vil fortsette eller ikke. Dette er avhengig av det tallet som vises for spiller. For å komme på trinn 4 må spiller ha vunnet i de 4 første spill, men ikke fått joker. Dette betyr at formlene for sannsynlighetene for å komme på trinn 0, 1 og 2 er de samme som for optimal strategi. Definer begivenhetene

$$\begin{aligned} W_4 &= \text{Fortsetter på trinn 4} \\ W_4^C &= \text{Stopper på trinn 4.} \end{aligned}$$

Trinn 3 beregnes på følgende måte:

$$\begin{aligned} \Pr\{B_3\} &= \Pr\{A_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\ &\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{A_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\ &\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{A_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\ &\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{A_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\} \\ &\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{A_5\}\Pr\{W_4\} \\ &= \Pr\{A_1\}^2(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^3 \\ &\quad +(3+\Pr\{W_4\})\Pr\{A_1\}(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^4. \end{aligned}$$

Vi trenger sannsynligheten for å stoppe på trinn 4.

$$\begin{aligned} \Pr\{W_4\} &= \Pr\{\cup_{i=0}^{9}(Z_4=i)\cap W_4\} \\ &= \Pr\{Z_4=1\}\sum_{i=0}^{9}\Pr\{W_4|Z_4=i\} \\ &= \frac{1}{10}[1+0.7+0.5+0.2+0.1+0.1+0.2+0.5+0.7+1] \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \Pr\{B_3\} &= \Pr\{A_1\}^2(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^3 \\ &\quad +3.5\Pr\{A_1\}(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr\{B_4\} &= \Pr\{A_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{\widetilde{A}_5\}\Pr\{W_4\} \\ &\quad +\Pr\{\widetilde{A}_1\}\Pr\{\widetilde{A}_2\}\Pr\{\widetilde{A}_3\}\Pr\{\widetilde{A}_4\}\Pr\{W_4^C\} \\ &= \Pr\{A_1\}(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^4\frac{1}{2}+(1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^4\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr\{B_5\} &= \Pr\{\widetilde{A}_1\cap\widetilde{A}_2\cap\widetilde{A}_3\cap\widetilde{A}_4\cap\widetilde{A}_5\}\frac{1}{2} \\ &\quad +\Pr\{\text{Joker i en av spille-omgangene}\} \\ &= \Pr\{\widetilde{A}_1\}^5\frac{1}{2} \\ &\quad +\Pr\{J_1^C\cap J_2^C\cap J_3^C\cap J_4^C\cap J_5\} \\ &\quad -\Pr\{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap J_5\cap W_4\} \\ &\quad +\Pr\{J_1^C\cap J_2^C\cap J_3^C\cap J_4\} \\ &\quad +\Pr\{J_1^C\cap J_2^C\cap J_3\}+\Pr\{J_1^C\cap J_2\}+\Pr\{J_1\} \\ &= (1-\Pr\{A_1\}-\Pr\{J_1\})^5\frac{1}{2}+(1-\Pr\{J_1\})^4\Pr\{J_1\}-\Pr\{A_1\}^4\Pr\{J_1\}\frac{1}{2} \\ &\quad +(1-\Pr\{J_1\})^3\Pr\{J_1\}+(1-\Pr\{J_1\})^2\Pr\{J_1\} \\ &\quad +(1-\Pr\{J_1\})\Pr\{J_1\}+\Pr\{J_1\}. \end{aligned}$$

Av interesse er også å finne sannsynligheten for å vinne førstepremie når spiller får Joker.

$$\begin{aligned}
&\Pr\{\text{vinne første-premie med Joker}\}\\
&= 1 - \Pr\{J_1^C \cap \cdots \cap J_5^C\}\\
&= 1 - (1 - \Pr\{J_1\})^5\\
&= \begin{cases} 0.40951 & \text{Når vi bruker } \textit{betinget trekkning} \\ 0.3790787 & \text{Når vi bruker } \textit{ubetinget vinner trekkning.} \end{cases}
\end{aligned}$$

der $\Pr\{J_1\} = 1/10$ og $\Pr\{J_1\} = 1/11$ for de to forskjellige treknings muligheter. Dersom vi har to Jokere vil sannsynligheten for å vinne bli større

$$\begin{aligned}
&\Pr\{\text{vinne førstepremie med to Jokere}\}\\
&= 1 - (1 - \Pr\{J_1\})^5\\
&= \begin{cases} 0.6333522 & \text{Når vi bruker } \textit{betinget trekkning} \\ 0.5981224 & \text{Når vi bruker } \textit{ubetinget vinner trekkning.}, \end{cases}
\end{aligned}$$

der $\Pr\{J_1\} = 2/11$ og $\Pr\{J_1\} = 2/12$ i de to forskjellige treknings muligheter.

Norsk Regnesentral, Gaustadalléen 23, Postboks 114 Blindern, 0314 OSLO.